

# Der Eigenwertalgorithmus E C P für Polynommatrizen

Falk, Sigurd

Veröffentlicht in:  
Abhandlungen der Braunschweigischen  
Wissenschaftlichen Gesellschaft Band 54, 2004,  
S.39-62



J. Cramer Verlag, Braunschweig

## Der Eigenwertalgorithmus E C P für Polynommatrizen\*

SIGURD FALK

Wendentorwall 15 A, D-38100 Braunschweig

### 1. Aufgabenstellung. Was will der Anwender?

Zahlreiche Aufgaben aus Naturwissenschaft und Technik führen auf die Matrizen-Eigenwertgleichung

$$\mathbf{y}^T \mathbf{F}(\lambda) = \mathbf{o}^T; \quad \mathbf{F}(\lambda) \mathbf{x} = \mathbf{o} \quad (1.1)$$

mit der Polynommatrix der Ordnung  $n$  vom Grade  $\rho$

$$\mathbf{F}(\lambda) = \mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_1 \lambda + \mathbf{A}_2 \lambda^2 + \dots + \mathbf{A}_\rho \lambda^\rho; \quad \det \mathbf{A}_\rho \neq 0 \quad (1.2)$$

mit im allgemeinen komplexwertigen Koeffizientenmatrizen  $\mathbf{A}_0$  bis  $\mathbf{A}_\rho$ .

In den Anwendungen sind aus dem Spektrum der Eigenwerte

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m; \quad m = \rho \cdot n \quad (1.3)$$

nur wenige, oft nur ein einziger Eigenwert von Interesse. Dies hat seinen Grund darin, daß bei der Modellbildung einer technischen Konstruktion oder auch bei der Finitisierung einer gewöhnlichen oder auch partiellen linearen Differentialgleichung die Ordnungszahl  $n$  sehr groß gewählt werden muß, um das reale Objekt möglichst gut abzubilden;  $n \geq 10\,000$  ist dabei keine Seltenheit. Kein zur Zeit auf dem Softwaremarkt angebotener „Eigenlöser“ erlaubt die gezielte Berechnung eines oder weniger Eigenwerte, Parallelrechnung ist nur bedingt möglich, und über die erreichte Genauigkeit wird keine Auskunft erteilt; es sei denn, der Algorithmus endet mit dem Vermerk NAN (not a number) ohne Ergebnis, wie dies besonders bei hoher Ordnung  $n$  und vollbesetzten Matrizen zu beobachten ist.

Ein besonderes Problem stellen die mehrfachen Eigenwerte bzw. Eigenwerthaufen (Nester, clusters) dar. Wie numerische Experimente zeigen, werden schon

---

\* (Eingegangen 19.01.2005), Eingereicht von Helmut Braß.

bei einem dreifachen Eigenwert kaum mehr als vier oder fünf richtige Dezimalen geliefert, während bei höherer Vielfachheit sogar die erste Dezimale fehlerhaft sein kann.

Hinzu kommt, daß bei reellwertigen mehrfachen Eigenwerten oft nicht unbedeutliche Imaginärteile ausgeworfen werden, so daß der Anwender im unklaren bleibt, ob dieser Effekt auf fehlerhaftes Rechnen zurückzuführen ist oder ob der Eigenwert tatsächlich komplexwertig ist.

In der vorliegenden Arbeit werden wir deshalb zeigen, wie es durch einen einfachen Kunstgriff gelingt, auch einen mehrfachen Eigenwert auf eine vorgegebene Anzahl von Dezimalen zu berechnen und einzuschließen.

## 2. Der E C P - Algorithmus

Der in [3] und [15] beschriebene Algorithmus E C P (Expansion des charakteristischen Polynoms) basiert auf der Bereitstellung von  $m = \rho \cdot n$  paarweise verschiedenen (disjunkten) Stützwerten

$$\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2, \dots, \tilde{\lambda}_m, \quad (2.1)$$

die geeignet zu wählen sind. mit den Produkten

$$P_j = \prod_{\substack{\mu=1 \\ \mu \neq j}}^m (\tilde{\lambda}_j - \tilde{\lambda}_\mu); \quad j = 1, 2, \dots, m \quad (2.2)$$

werden die Defekte

$$d_j = \frac{\det \mathbf{F}(\tilde{\lambda}_j)}{P_j} \cdot \frac{1}{\det \mathbf{A}_\rho}; \quad j = 1, 2, \dots, m \quad (2.3)$$

und daraus die Hauptwerte

$$\Lambda_j = \tilde{\lambda}_j - d_j; \quad j = 1, 2, \dots, m \quad (2.4)$$

berechnet und (in beliebiger Reihenfolge) mitsamt den drei Spaltensummen

$$L = \sum_{\mu=1}^m \tilde{\lambda}_\mu; \quad D = \sum_{\mu=1}^m d_\mu, \quad H = \sum_{\mu=1}^m \Lambda_\mu \quad (2.5)$$

in einer Liste zusammengestellt

$$\mathcal{L}_m = \left\{ \begin{array}{ccc} \text{Stützwerke} & \text{Defekte} & \text{Hauptwerte} \\ \hline \tilde{\lambda}_1 & d_1 & \Lambda_1 \\ \tilde{\lambda}_2 & d_2 & \Lambda_2 \\ \tilde{\lambda}_3 & d_3 & \Lambda_3 \\ \dots & \dots & \dots \\ \tilde{\lambda}_m & d_m & \Lambda_m \\ \hline L & D & H \end{array} \right\}. \quad (2.6)$$

Die Kontrollgleichung

$$H = L - D = \text{Spur}(\mathbf{A}_{\rho-1} \mathbf{A}_{\rho}^{-1}) = \sum_{j=1}^m \lambda_j \quad (2.7)$$

verbürgt die fehlerfreie Berechnung der Defekte aus den vorgegebenen Stütz-  
werten. Je kleiner die Differenzen zwischen den gewählten Stütz-  
werten und den (unbekannten) Eigenwerten sind, desto kleiner werden die Defekte und damit  
umso genauer die Hauptwerte. Ist der Stütz-  
wert  $\tilde{\lambda}_j$  gleich einem Eigenwert, so  
wird  $\det F(\tilde{\lambda}_j) = 0$  und damit nach (2.3) auch  $d_j = 0$ ; folglich ist nach (2.4) der  
Hauptwert ein Eigenwert. Diesen Fall schließen wir ausdrücklich aus; es sei  
also

$$d_j \neq 0; \quad j = 1, 2, \dots, m, \quad (2.8)$$

somit auch

$$\tilde{\lambda}_j \neq \lambda_j; \quad j = 1, 2, \dots, m. \quad (2.9)$$

Grundlage für alles folgende ist die mit den Hauptwerten  $\lambda_j$  und den Defekten  
 $d_j$  gebildete ECP-Begleitmatrix der Ordnung  $m$

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} \Lambda_1 & -d_2 & -d_3 & \dots & -d_{m-1} & -d_m \\ -d_1 & \Lambda_2 & -d_3 & \dots & -d_{m-1} & -d_m \\ -d_1 & -d_2 & \Lambda_3 & \dots & -d_{m-1} & -d_m \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -d_1 & -d_2 & -d_3 & \dots & \Lambda_{m-1} & -d_m \\ -d_1 & -d_2 & -d_3 & \dots & -d_{m-1} & \Lambda_m \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

welche die Gesamtinformation des Matrizentupels

$$\mathbf{T}_{\rho} = \{\mathbf{A}_0, \mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_{\rho}\} \quad (2.11)$$

enthält.

Mit der Eigenmatrix (charakteristischen Matrix)

$$\mathbf{G}(\lambda) = \mathbf{E} - \lambda \mathbf{I} \quad (2.12)$$

gilt nach [3] und [16, S.410 ff.]

$$\det \mathbf{F}(\lambda) = \det \mathbf{G}(\lambda) \cdot \text{const.} \quad (2.13)$$

Somit besitzt die Matrix  $\mathbf{G}(\lambda)$  die gleichen Eigenwerte wie die Polynommatrix (1.1). Mit der Summe

$$S(\lambda) = \sum_{\mu=1}^m \frac{d_{\mu}}{\tilde{\lambda}_{\mu} - \lambda} \quad (2.14)$$

und dem **Stützpolynom**

$$P(\lambda) = \prod_{\mu=1}^m (\tilde{\lambda}_{\mu} - \lambda) \quad (2.15)$$

läßt sich das charakteristische Polynom und damit die Eigenwertgleichung explizit angeben als

$$\det \mathbf{G}(\lambda) = P(\lambda)[1 - S(\lambda)] = 0, \quad (2.16)$$

und da nach Voraussetzung (2.9) für keinen Eigenwert  $P(\lambda_j) = 0$  gilt, ist auch die rational gebrochene Funktion (eine sogenannte Pade-Funktion)

$$f(\lambda) = 1 - S(\lambda) = 0 \quad (2.17)$$

eine Eigenwertgleichung.

Schließlich erwähnen wir noch den durch die Teilsumme

$$S_k(\lambda) = \sum_{\substack{\mu=1 \\ \mu \neq k}}^m \frac{d_{\mu}}{\tilde{\lambda}_{\mu} - \lambda} \quad (2.18)$$

definierten **Optimalwert**

$$\overset{\circ}{\Lambda}_k = \tilde{\lambda}_k - \frac{d_k}{1 - S_k(\Lambda_k)}, \quad (2.19)$$

der bei hinreichend betragskleinen Defekten eine sehr viel bessere Näherung darstellt als der Hauptwert  $\Lambda_k$ .

Die Gleichung (2.17) geht für einen Hauptwert  $\Lambda_k$  über in

$$f(\Lambda_k) = 1 - \frac{d_k}{\bar{\lambda}_k - \Lambda_k} - S_k(\Lambda_k) = 1 - 1 - S_k(\Lambda_k) = -S_k(\Lambda_k). \quad (2.20)$$

Die Teilsumme (2.15) nimmt daher für  $\lambda = \Lambda_k$  einen kleinen Wert an, so daß der Nenner in (2.19) nicht verschwinden kann.

Auch die einem Eigenwert  $\lambda_j$  zugeordneten Eigenvektoren lassen sich explizit angeben als

$$\mathbf{y}_j^T = \left[ \frac{d_1}{\bar{\lambda}_1 - \lambda_j} \quad \frac{d_2}{\bar{\lambda}_2 - \lambda_j} \quad \cdots \quad \frac{d_m}{\bar{\lambda}_m - \lambda_j} \right] \quad (2.21)$$

und

$$\mathbf{x} = \left[ \frac{1}{\bar{\lambda}_1 - \lambda_j} \quad \frac{1}{\bar{\lambda}_2 - \lambda_j} \quad \cdots \quad \frac{1}{\bar{\lambda}_m - \lambda_j} \right]^T. \quad (2.22)$$

Zu einem Eigenwert  $\lambda_j$  von beliebiger Vielfachheit gehört somit nur ein einziges Eigenvektorkonstrukt  $\mathbf{y}_j^T, \mathbf{x}_j$ ; der Eigenwert  $\lambda_j$  ist daher total defektiv, d.h. die Matrix

$$\mathbf{G}(\lambda_j) = \mathbf{E} - \lambda_j \mathbf{I} \quad (2.23)$$

besitzt den Rang  $m-1$ .

Dazu ein einfaches Beispiel. Die Matrix  $\mathbf{F}(\lambda) = \mathbf{A} - \lambda \mathbf{B}$  mit

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 9,9 & 9,8 & -0,2 \\ 9,8 & 14,6 & 4,6 \\ -0,2 & 4,6 & 5,6 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}; \quad \det \mathbf{B} = 1 \quad (a)$$

besitzt die Eigenwerte

$$\left. \begin{array}{l} \lambda_1 = 0,896\,335\,130\,822\,434\,9 \\ \lambda_2 = 4,900\,599\,083\,440\,541 \\ \lambda_3 = 9,903\,065\,785\,737\,022 \end{array} \right\} \quad \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 15,7. \quad (b)$$

Mit den sehr guten Stützwerten 1, 5 und 10 den recht groben Werten 0,6 und 12 resultieren die beiden Listen

$$\mathcal{L}_1 = \left\{ \begin{array}{ccc} 1 & 0,1 & 0,9 \\ 5 & 0,1 & 4,9 \\ 10 & 0,1 & 9,9 \\ 16 & 0,3 & 15,7 \end{array} \right\}; \quad \mathcal{L}_2 = \left\{ \begin{array}{ccc} 0 & -0,604\,166\,666\,666\,667 & 0,604\,166\,666\,666\,667 \\ 6 & 0,608\,333\,333\,333\,333 & 5,391\,666\,666\,666\,667 \\ 12 & 2,295\,833\,333\,333\,333 & 9,704\,166\,666\,666\,667 \\ 18 & 2,3 & 15,7 \end{array} \right\}. \quad (c)$$

Die Kontrollgleichung (2.7) ist mit

$$L - D = H = 15,7 \quad (d)$$

beidemal erfüllt.

Ferner wird für die beiden Listen (c)

$$\left\{ \begin{array}{cc} \text{Teilsumme (2.18)} & \text{Optimalwert (2.19)} \\ \hline 0,035\,379\,253 & 0,896\,332\,314 \\ -0,006\,033\,182 & 4,900\,599\,700 \\ -0,031\,644\,100 & 9,903\,067\,348 \end{array} \right\}. \quad (e)$$

$$\left\{ \begin{array}{cc} 0,314\,203\,834 & 0,880\,971\,193 \\ 0,459\,470\,521 & 4,874\,560\,303 \\ -0,101\,970\,992 & 9,916\,611\,826 \end{array} \right\}. \quad (f)$$

Die Optimalwerte (e) sind auf 5, die in (f) jedoch nur auf 2 Dezimalen genau.

### 3. Sukzessive Minimierung der Defekte. Evolution

Für manche Zwecke ist es erforderlich oder zumindest empfehlenswert, die Defekte (2.3) zu verkleinern. Neben der Originalliste (2.6) wird ein Speicher mit  $m$  Plätzen zur Aufnahme der (teilweise) erneuerten Stützwerte bereitgehalten, der sich während der Rechnung auffüllt. Maßgeblich für den Verlauf der Iteration ist die Niveauhöhe

$$\omega = \frac{1}{m} \cdot \sum_{\mu=1}^m |d_{\mu}|, \quad (3.1)$$

die nach jedem Durchgang verkleinert wird.

#### ERSTER DURCHGANG

Die  $m$  Defekte werden in beliebiger Reihenfolge (in Parallelrechnung) abgefragt:

Erste Abfrage. Ist

$$|d_k| - \omega < 0? \quad (3.2)$$

Ja. Dann ist  $d_k$  klein genug, und der Stützwert  $\tilde{\lambda}_k$  geht unverändert in den Speicher.

Nein. Dann wird als neuer Stützwert der Optimalwert  $\overset{\circ}{\Lambda}_k$  (2.19) und damit der Defekt  $\overset{\circ}{d}_k$  nach (2.3) berechnet.

Zweite Abfrage: Ist

$$|d_k| - |\overset{\circ}{d}_k| > 0? \quad (3.3)$$

Ja. Dann geht  $\overset{\circ}{\Lambda}_k$  als neuer Stützwert in den Speicher.

Nein. Dann geht  $\tilde{\Lambda}_k$  unverändert in den Speicher.

Nach  $m$  Durchgängen ist der Speicher mit (teilweise) erneuerten Stützwerten aufgefüllt. Mit diesen wird nach (2.6) eine neue Liste erstellt, nachdem die alte gelöscht wurde. Anhand der jetzt deutlich kleineren Niveauhöhe  $\overset{\circ}{\omega}$  wird die Anzahl der Durchgänge entschieden.

Der Algorithmus kann rigoros vereinfacht werden durch eine sogenannte **Evolution**, worunter folgendes zu verstehen ist. Man verzichtet auf die beiden Abfragen (3.2) und (3.3) und erneuert (gewissermaßen auf Verdacht) j e d e n der  $m$  Stützwerte, und hier unterscheiden wir zwei Vorgehensweisen.

- a) **Einfache Evolution.** Die Stützwerte  $\tilde{\Lambda}_k$  der aktuellen Liste werden durch die Hauptwerte  $\Lambda_k$  ersetzt.
- b) **Beschleunigte Evolution.** Die Stützwerte  $\tilde{\Lambda}_k$  der aktuellen Liste werden durch die Optimalwerte  $\overset{\circ}{\Lambda}_k$  ersetzt.

Die Evolution wird begleitet und kontrolliert durch Mitführung der Niveauhöhe  $\omega$ , die nach jedem Durchgang ausgedruckt wird. Dabei unterscheiden wir:

- A Evolution solange bis die Rechnung stagniert; dann erhält die Endliste in der ersten Spalte alle  $m$  Eigenwerte mit der verfügbaren Maschinengenauigkeit.
- B Es wird ein Schwellwert (Grenzwert)

$$\omega \leq 10^{-\sigma}; \quad \sigma = 1, 2, \dots \quad (3.4)$$

vorgegeben. Sowie dieser unterschritten ist, wird die so aktualisierte Liste gespeichert.

Eine Variante ist die als **Eskalation** bezeichnete Evolution in Etappen. Mit der Zerlegung

$$\mathbf{F}(\lambda) = \mathbf{H}(\lambda) + \mathbf{R}(\lambda) \longleftrightarrow \mathbf{R}(\lambda) = \mathbf{F}(\lambda) - \mathbf{H}(\lambda) \quad (3.5)$$

mit dem Hauptteil  $\mathbf{F}(\lambda)$  und dem Rest  $\mathbf{R}(\lambda)$  entsteht die zweiparametrische Matrix

$$\mathbf{G}(\lambda, \mu) = \mathbf{H}(\lambda) + \mu \cdot \mathbf{R}(\lambda). \quad (3.6)$$



Läßt man den reellwertigen Parameter  $\mu$  stetig von Null bis Eins wachsen, so entstehen sogenannte **Eigenpfade** in der komplexen Zahlenebene (bzw. auf der reellen  $\lambda$ -Achse), auf welchen es die Näherungswerte zu verfolgen gilt.

Zum Wert  $\mu = 0$  gehören die  $m$  Eigenwerte  $\eta_j$  der Matrix  $\mathbf{H}(\lambda)$ , für  $\mu = 1$  dagegen die gesuchten Eigenwerte  $\lambda_j$  der Matrix  $\mathbf{F}(\lambda)$ . Da die Eigenpfade analytisch nicht darstellbar sind, gehen wir in Etappen vor

$$\mu_1 = 0; \quad \mu_2, \quad \mu_3, \quad \dots, \quad \mu_k \leq 1, \quad (3.7)$$

wo nach jeder Etappe die zu  $\mu_\beta$  gehörenden Optimalwerte als Stützwerte für  $\mu_{\beta+1}$  dienen.

Dabei ist zu unterscheiden:

a) Stetiger Verlauf der Eigenpfade.

Während des ganzen Verlaufes von  $\mu = 0$  bis  $\mu = 1$  bleibt die Zerlegung (3.5) erhalten.

b) Unstetiger Verlauf.

Für die Werte (3.7) wird die Zerlegung (3.6) jedesmal (oder doch häufig) neu vorgenommen.

#### 4. Iteration gegen einen numerisch trennbaren Eigenwert

Wir zerlegen die grundlegende Eigenwertgleichung (2.17) mittels der Teilsumme (2.18) und multiplizieren sie mit dem rechts angegebenen Faktor:

$$f(\lambda) = 1 - S_k(\lambda) - \frac{d_k}{\tilde{\lambda}_k - \lambda} = 0 \left| \frac{\tilde{\lambda}_k - \lambda}{1 - S_k(\lambda)} \right|. \quad (4.1)$$

Dies führt auf die Eigenwertgleichung

$$f_k(\lambda) = \tilde{\lambda}_k - \lambda - \frac{d_k}{1 - S_k(\lambda)} = 0 \quad (4.2)$$

oder auch

$$f_k(\lambda) = \Lambda_k - \lambda - \frac{S_k(\lambda)d_k}{1 - S_k(\lambda)}, \quad (4.3)$$

wie man leicht nachrechnet. Man erkennt aus dieser (sonst nicht weiter benötigten) Darstellung, da das Produkt  $S_k(\lambda)d_k$  von sehr kleinem Betrag und der Nen-

ner  $1 - S_k(\lambda)$  in der Nähe des Eigenwertes  $\lambda_k$  von Eins nur wenig verschieden ist, daß sich die Funktion  $f_k(\lambda)$  nur wenig von der sogenannten **Hauptgeraden**

$$g_k(\lambda) = \Lambda_k - \lambda \quad (4.4)$$

unterscheidet, und gerade diese Eigenschaft macht die Gleichung (4.2) zur Iteration gegen einen numerisch trennbaren Eigenwert  $\lambda_k$  so geeignet.

Die Asymptote  $gg$  ist in die Hauptgerade  $hh$  übergegangen (die ihrerseits Asymptote ist), und die nur mehr  $m-1$  Polstellen sind die (unbekannten) Eigenwerte des Hauptminors, der durch Streichen der Spalte und Zeile der Nummer  $k$  in der Matrix  $\mathbf{G}(\lambda)$  (2.12) definiert ist. Bei betragskleinen Defekten sind sie nur wenig von den Stützstellen verschieden.

Zur iterativen Berechnung des Eigenwertes  $\lambda_k$  stehen uns zwei Verfahren zur Verfügung.

#### 1. Die klassische Regula falsi

Wähle einen Näherungswert  $\lambda_1$ , berechne damit den Funktionswert  $y_1 = f_k$  und daraus

$$\lambda_2 = \lambda_1 + y_1. \quad (4.5)$$

Mit  $y_2 = f_k(\lambda_2)$  wird dann der verbesserte Wert

$$\lambda_3 = \lambda_2 - \frac{y_2}{v_1} \text{ mit } v_1 = \frac{y_2}{y_1} - 1. \quad (4.6)$$

Start mit  $\lambda_1 = \overset{\circ}{\Lambda}_k$  (Optimalwert). Ist  $|y_3| = |f_k(\lambda)|$  nicht klein genug, so erfolgt ein zweiter Durchgang mit dem Startwert  $\lambda_1 \rightarrow \lambda_3$ . Dies wird solange iterativ fortgesetzt, bis  $|y_3|$  einen vorgegebenen Schwellwert unterschritten hat oder die Rechnung stagniert.

#### 2. Die Iteration kann erheblich beschleunigt werden durch die in [2] beschriebene **verallgemeinerte Regula falsi (V R F)**.

Diese basiert auf den Differenzenquotienten

$$\Delta_{jp} = \frac{y_j - y_p}{\lambda_j - \lambda_p}; \quad j = 1, 2, \dots, p-1 \quad (4.7)$$

und besteht im Auflösen von linearen Gleichungssystemen ansteigender Ordnung gemäß

$$\begin{bmatrix} y_1 & 1 \\ y_2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta_{13} \\ \Delta_{23} \end{bmatrix} \rightarrow v_2 \rightarrow \lambda_4 = \lambda_3 - \frac{y_3}{v_2}. \quad (4.8)$$

$$\begin{bmatrix} y_1 & y_1 \Delta_{14} & 1 \\ y_2 & y_2 \Delta_{24} & 1 \\ y_3 & y_3 \Delta_{34} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta_{14} \\ \Delta_{24} \\ \Delta_{34} \end{bmatrix} \rightarrow v_3 \rightarrow \lambda_5 = \lambda_4 - \frac{y_4}{v_3}. \quad (4.9)$$

$$\begin{bmatrix} y_1 & y_1 \Delta_{15} & y_1^2 & 1 \\ y_2 & y_2 \Delta_{25} & y_2^2 & 1 \\ y_3 & y_3 \Delta_{35} & y_3^2 & 1 \\ y_4 & y_4 \Delta_{45} & y_4^2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta_{15} \\ \Delta_{25} \\ \Delta_{35} \\ \Delta_{45} \end{bmatrix} \rightarrow v_4 \rightarrow \lambda_6 = \lambda_5 - \frac{y_5}{v_4}. \quad (4.10)$$

Alle Differenzenquotienten (5.9) sind nur wenig von  $-1$  verschieden, und dies hat zur Folge, daß die Gleichungssysteme (4.8) bis (4.10) hinreichend stabil sind.

Sollte  $|y_6|$  nicht klein genug sein, so erfolgt ein neuer Start mit  $\lambda_6 \rightarrow \lambda_1$  in (4.5).

## 5. Iteration gegen einen mehrfachen Eigenwert

Vorweg eine Studie allgemeinerer Art. Das Polynom  $p(\lambda)$  besitze eine Nullstelle  $\lambda_r$  der Vielfachheit  $r$ , dann ist

$$p(\lambda_r) = 0, \quad p'(\lambda_r) = 0, \dots, \quad p^{(r-1)}(\lambda_r) = 0, \quad (5.1)$$

dagegen

$$p^{(r)}(\lambda_r) \neq 0. \quad (5.2)$$

In der letzten Gleichung (5.1) ist die Nullstelle  $\lambda_r$  nur noch **einfach**, und diese Einsicht wenden wir auf unser Problem an, indem wir eine geeignet zu wählende Eigenwertgleichung (von denen es mehrere gibt)  $r-1$  mal nach  $\lambda$  differenzieren.

Es seien nun die dem Eigenwert  $\lambda_r$  nächstgelegenen  $r$  Stützwerte der einfachen Darstellung halber die ersten  $r$  in der Liste (2.6), dann multiplizieren wir die Gleichung (2.17) mit dem verkürzten Stützpolynom

$$P_r(\lambda) = (\tilde{\lambda}_1 - \lambda)(\tilde{\lambda}_2 - \lambda) \dots (\tilde{\lambda}_r - \lambda), \quad (5.3)$$

um die Pole  $\tilde{\lambda}_1$  bis  $\tilde{\lambda}_r$  zu beseitigen, und bekommen damit die Eigenwertgleichung

$$f_r(\lambda) = P_r(\lambda)[1 - S(\lambda)] = 0, \quad (5.4)$$

die nur  $r-1$  mal differenziert wird, was zufolge der Ableitungsregel

$$\frac{d}{d\lambda} \left( \frac{d_\mu}{\tilde{\lambda}_\mu - \lambda} \right) = \frac{d_\mu}{(\tilde{\lambda}_\mu - \lambda)^2} \quad (5.5)$$

usw. nicht schwierig ist. Mit den Mittelwerten

$$L_r = \frac{1}{r} \sum_{\mu=1}^m \tilde{\lambda}_\mu; \quad D_r = \frac{1}{r} \sum_{\mu=1}^r d_\mu \quad (5.6)$$

und der Summe

$$S_{r1}(\lambda) = \sum_{\mu=r+1}^m \frac{d_\mu}{\tilde{\lambda}_\mu - \lambda} \quad (5.7)$$

sowie einer Korrekturfunktion  $k_r(\lambda)$  führt dies nach einer elementaren hier unterdrückten Rechnung auf die angestrebte Eigenwertgleichung

$$f_r(\lambda) = L_r - \lambda - \frac{D_r + k_r(\lambda)}{1 - S_{r1}(\lambda)} = 0, \quad (5.8)$$

die nun der Nullstelle  $\lambda_r$  als einfachen Eigenwert besitzt.

Für  $r = 1$  wird  $L_r = \lambda_1$ ,  $D_1 = d_1$  und  $k_r(\lambda) = 0$ , und damit geht die Gleichung (5.8) über in (4.2), wie es sein muß.

Nun zur Korrekturfunktion  $k_r(\lambda)$ , welche die eigentliche Information beinhaltet. Mit den Summen

$$S_{r\sigma}(\lambda) = \sum_{\mu=r+1}^m \frac{d_\mu}{(\tilde{\lambda}_\mu - \lambda)^\sigma}; \quad \sigma = 1, 2, \dots, r \quad (5.9)$$

wird in leicht verständlicher Darstellung

$$\begin{aligned} k_r(\lambda) = & P_r^{(r-2)}(\lambda) S_{r2}(\lambda) + P_r^{(r-3)}(\lambda) S_{r3}(\lambda) + \dots + P_r''(\lambda) S_{r,r-2}(\lambda) \\ & + P_r'(\lambda) S_{r,r-1}(\lambda) + P_r(\lambda) S_{r,r}(\lambda). \end{aligned} \quad (5.10)$$

Danach ist zum Beispiel  $r = 2$

$$k_2(\lambda) = -\frac{1}{2} P_2(\lambda) S_{22}(\lambda), \quad (5.11)$$

und für  $r = 3$  wird

$$k_3(\lambda) = \frac{1}{3} [P'_3(\lambda) S_{32}(\lambda) + P_3(\lambda) S_{33}(\lambda)] \quad (5.12)$$

mit

$$P'_3(\lambda) = -[(\tilde{\lambda}_1 - \lambda)(\tilde{\lambda}_2 - \lambda) + (\tilde{\lambda}_1 - \lambda)(\tilde{\lambda}_3 - \lambda) + (\tilde{\lambda}_2 - \lambda)(\tilde{\lambda}_3 - \lambda)], \quad (5.13)$$

und dies läßt sich mit

$$Q_3(\lambda) = - \left[ \frac{1}{\tilde{\lambda}_1 - \lambda} + \frac{1}{\tilde{\lambda}_2 - \lambda} + \frac{1}{\tilde{\lambda}_3 - \lambda} \right] \quad (5.14)$$

kompakter schreiben als

$$k_3(\lambda) = \frac{1}{3} P_3(\lambda) \left[ Q_3(\lambda) S_{32}(\lambda) + S_{33}(\lambda) \right]. \quad (5.15)$$

Nach dem der Eigenwert  $\lambda_r$  berechnet wurde, gehen damit in die Gleichungen (5.1) und (5.2) ein; es müssen dann die Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} 1 - \sum_{\mu=1}^m \frac{d_\mu}{\tilde{\lambda}_\mu - \lambda_r} &= 0, \\ \sum_{\mu=1}^m \frac{d_\mu}{(\tilde{\lambda}_\mu - \lambda_r)^2} &= 0, \\ \dots\dots\dots \\ \sum_{\mu=1}^m \frac{d_\mu}{(\tilde{\lambda}_\mu - \lambda_r)^{(r-1)}} &= 0, \end{aligned} \right\}. \quad (5.16)$$

erfüllt sein, wogegen

$$\sum_{\mu=1}^m \frac{d_\mu}{(\tilde{\lambda}_\mu - \lambda_r)^r} \neq 0 \quad (5.17)$$

ist, was zur Kontrolle dient.

Kommen wir nun zu den Algorithmen.

#### 1. Die (verallgemeinerte) Regula falsi.

Verläuft analog zu (4.10) bis (4.15). Start mit dem arithmetischen Mittel der Hauptwerte

$$H_r = \frac{1}{r} \sum_{\mu=1}^r \Lambda_\mu. \quad (5.18)$$

## 2. Die beschleunigte RITZ-Iteration.

Nähes dazu in einer Arbeit von Wagner [13].

**6. Der Austausch von Stützwerten**

Wird ein Stützwert  $\tilde{\lambda}_k$  ersetzt durch  $\hat{\lambda}_k$ , so ändern sich alle  $m$  Defekte, und zwar wird nach [11, S. 422] zunächst

$$\hat{d}_\mu = d_\mu \cdot \frac{\tilde{\lambda}_\mu - \tilde{\lambda}_k}{\tilde{\lambda}_\mu - \hat{\lambda}_k}; \quad \mu = 1, 2, \dots, m; \quad \mu \neq k, \quad (6.1)$$

daraus

$$\widehat{D}_k = \sum_{\substack{\mu=1 \\ \mu \neq k}}^m \hat{d}_\mu \quad (6.2)$$

und weiter mit der Summe  $D$  aus (2.5) der noch fehlende Defekt

$$\hat{d}_k = (D - \widehat{D}_k) - (\tilde{\lambda}_k - \hat{\lambda}_k). \quad (6.3)$$

Die Eigenwertgleichung (4.2) geht dann mit der auf diese Weise erneuerten Summe

$$\widehat{S}_k(\lambda) = \sum_{\substack{\mu=1 \\ \mu \neq k}}^m \frac{\hat{d}_\mu}{\tilde{\lambda}_\mu - \lambda} \quad (6.4)$$

über in

$$\hat{f}_k(\lambda) = \hat{\lambda}_k - \lambda - \frac{\hat{d}_k}{1 - \widehat{S}_k(\lambda)} = 0. \quad (6.5)$$

**7. Einschließung von Eigenwerten**

Mit den Spaltenraden

$$\rho_j = (m-1)|d_j|; \quad j = 1, 2, \dots, m \quad (7.1)$$

der ECP-Begleitmatrix (2.10) gelten die bekannten Sätze von GERSCHGORIN:

SATZ 1. Kein Eigenwert liegt außerhalb der Vereinigungsmenge der  $m$  Kreise mit den Mittelpunkten  $\Lambda_j$  und den Radien  $\rho_j$ .

SATZ 2. Liegen irgend  $p$  Kreise getrennt von den übrigen, so liegen in ihrer Vereinigungsmenge genau  $p$  Eigenwerte.

SATZ 3. Liegt ein Kreis von den übrigen Kreisen getrennt, so enthält er genau einen Eigenwert, und es gilt

$$|\Lambda_K - \lambda| < \rho_k = (m-1)|d_k|, \quad (7.2)$$

oder auch mit

$$\lambda = \Lambda_k + \xi; \quad \xi = \lambda - \Lambda_k \quad (7.3)$$

kürzer formuliert

$$|\xi| < \rho_k = (m-1)|d_k|. \quad (7.4)$$

Dazu der folgende Test: sind die  $m-1$  Differenzen

$$\Delta_{\mu k} = |\Lambda_\mu - \Lambda_k| - (\rho_\mu + \rho_k); \quad \mu = 1, 2, \dots, m; \quad \mu \neq k \quad (7.5)$$

positiv, so liegt der Kreis  $K_k$  mit dem Mittelpunkt  $\Lambda_k$  und dem Radius  $\rho_k$  isoliert von den übrigen Kreisen.

Der Radius  $\rho_k$  kann bei hinreichend betragskleinen Defekten erheblich verkleinert werden mittels der Eigenwertgleichung (4.3), die zufolge (7.3) übergeht auf

$$\xi = -d_k \frac{S_k(\xi)}{1 - S_k(\xi)} \quad (7.6)$$

mit

$$S_k(\xi) = \sum_{\substack{\mu=1 \\ \mu \neq k}}^m \frac{d_\mu}{(\tilde{\lambda}_\mu - \Lambda_k) - \xi}. \quad (7.7)$$

Wir gehen jetzt zu den Beträgen über. Zunächst besteht wegen  $|\xi| < \rho_k$  die Ungleichung

$$|S_k(\xi)| < \overset{\circ}{S}_k = \sum_{\substack{\mu=1 \\ \mu \neq k}}^m \frac{|d_\mu|}{|\tilde{\lambda}_\mu - \Lambda_k| - \rho_k}. \quad (7.8)$$

Abfrage ist  $\overset{\circ}{S}_k < 1$ ?

Nein. Dann kleinere Defekte einführen. (Evolution und andere Maßnahmen):

Ja. Dann wird zufolge  $|S_k(\xi)| < \overset{\circ}{S}_k$  der Nenner vergrößert und der Zähler verkleinert, womit anstelle von  $|\xi| < \rho_k$  die weitaus bessere Abschätzung  $|\xi| < R_k$  gewonnen ist:

$$|\xi| < |d_k| \frac{|S_k(\xi)|}{|1 - S_k(\xi)|} < |d_k| \frac{\overset{\circ}{S}_k}{1 - \overset{\circ}{S}_k} =: R_k. \quad (7.9)$$

In einem weiteren Schritt ersetzen wir  $\rho_k$  durch  $R_k$ , das gibt

$$\overset{\circ\circ}{S}_k = \sum_{\substack{\mu=1 \\ \mu \neq k}}^m \frac{d_k}{|\tilde{\lambda}_\mu - \Lambda_k| - R_k} \quad (7.10)$$

und daraus endgültig (eine nochmalige Verbesserung lohnt sich im allgemeinen nicht)

$$r_k = |d_k| \frac{\overset{\circ\circ}{S}_k}{1 - \overset{\circ\circ}{S}_k}; \quad r_k < R_k. \quad (7.11)$$

Mit Hilfe des Hauptwertes

$$\Lambda_k = U_k + V_k i \quad (7.12)$$

gelten somit die Einschließungen

$$U_k - r_k < \operatorname{Re} \lambda_k < U_k + r_k, \quad (7.13)$$

$$V_k - r_k < \operatorname{Im} \lambda_k < V_k + r_k. \quad (7.14)$$

Sonderfall. Sind die  $\rho + 1$  Matrizen  $\mathbf{A}_0$  bis  $\mathbf{A}_\rho$  aus (1.2) reellwertig und ist der Hauptwert  $\Lambda_k$  reell, so ist auch der Eigenwert  $\lambda_k$  reell. Damit entfällt die Einschließung (7.14).

Es seien nun  $p$  Eigenwerte  $\lambda_1$  bis  $\lambda_p$  numerisch nicht trennbar, dann gelingt eine Einschließung in Gruppen; dazu ist es erforderlich, die Defekte  $d_1$  bis  $d_p$  so betragsklein wie möglich zu machen.

Zur Einschließung existiert eine umfangreiche Literatur, siehe dazu die Arbeiten [9] bis [12].

Dazu das Demonstrationsbeispiel von Seite 4 mit der Liste  $\mathcal{L}_1$  auf einem zehnstelligen Taschenrechner. Der Eigenwert  $\lambda_3$  soll eingeschlossen werden.



Die drei Gerschgorin-Kreise liegen offenbar getrennt voneinander. Mit dem Hauptwert  $\Lambda_3 = 9,9$  und dem Radius

$$\rho_3 = (m-1)|d_3| = 2 \cdot 0,1 = 0,2 \quad (\text{a})$$

und der Summe (7.8) wird nach (7.9)

$$|\xi| < 0,1 \frac{0,032\,770\,847}{1 - 0,032\,770\,847} = 3,388\,116\,135 \cdot 10^{-3} = R_3. \quad (\text{b})$$

Dieser Radius läßt sich (hier nur unwesentlich) verkleinern mittels der Summe  $\overset{\circ}{S}_3 = 0,031\,662\,518$  und daraus nach (7.11)  $r_3 = 0,003\,166\,252$ . Um die Einschließung zu verbessern, ersetzen wir nach (6.1) bis (6.4) den Stützwert  $\tilde{\lambda}_3 = 10$  durch den gerundeten Optimalwert  $\hat{\lambda}_3 = 9,903\,067$  von Seite 5, Liste (e). Man erhält die verbesserte Liste

$$\hat{\mathcal{L}}_1 = \left\{ \begin{array}{ccc} 1 & 0,101\,088\,759 & 0,898\,911\,241 \\ 5 & 0,101\,976\,987 & 4,898\,023\,013 \\ 9,903\,067 & 1,254 \cdot 10^{-6} & 9,903\,065\,746 \end{array} \right\}. \quad (\text{c})$$

Nun zur Einschließung. Mit der Summe  $\overset{\circ}{S}_3 = 0,032\,152\,999$  wird  $R_3 = 0,083318666 \cdot 10^{-6}$  und damit nach (7.13)

$$9,903\,065\,663 < \lambda_3 < 9,903\,065\,829. \quad (\text{d})$$

Der nächste Austausch führt auf die Liste

$$\hat{\mathcal{L}}_1 = \left\{ \begin{array}{ccc} 1 & 0,101\,088\,773 & 0,898\,911\,227 \\ 5 & 0,101\,977\,013 & 4,898\,022\,987 \\ 9,903\,065\,746 & -4,1 \cdot 10^{-8} & 9,903\,065\,787 \end{array} \right\} \quad (\text{e})$$

und damit auf eine noch bessere Einschließung.

## 8. Skalare Polynome

Das skalare Polynom von Grade  $\rho$

$$p_\rho(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + \dots + a_{\rho-1}\lambda^{\rho-1} + a_\rho\lambda^\rho \quad (8.1)$$

wird nach GÜNTHER/FROBENIUS expandiert auf das **Begleitpaar** **A;B** der Ordnung  $\rho$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & a_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & a_{n-1} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_n \end{bmatrix} \quad (8.2)$$

dann gilt bekanntlich

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{B}) = p_\rho(\lambda) \cdot (-1)^{\rho+1}. \quad (8.3)$$

Damit ist unter Umgehung des (nicht immer zuverlässigen) HORNER-Schemas die Nullstellensuche auf ein lineares Eigenwertproblem zurückgeführt. Es ist darauf zu achten, daß der Koeffizient  $a_\rho$  einen extrem kleinen Wert annehmen kann, so daß die in der Literatur oft empfohlene **Normierung** des Polynoms (8.1), d. h. die Division durch  $a_\rho$  nicht immer praktikabel ist.

Es seien nun die Koeffizienten  $a_1$  bis  $a_{\rho-1}$  hinreichend von Null verschieden, so daß die  $\rho - 1$  Quotienten

$$\frac{a_0}{a_1} = q_1, \quad \frac{a_1}{a_2} = q_2, \quad \dots, \quad \frac{a_{\rho-2}}{a_{\rho-1}} = q_{\rho-1} \quad (8.4)$$

endlich sind. Es gelingt dann, mittels des in [15, S., 91] beschriebenen **beweglichen Pivots** die letzte Spalte der Matrix  $\mathbf{A}$  zu vereinfachen, indem zuerst  $a_0$  durch  $a_1$ , sodann  $a_1$  durch  $a_2$  usw. annulliert wird. Damit geht das Paar  $\mathbf{A}; \mathbf{B}$  über in ein Paar von Bidiagonalmatrizen.

$$\overset{\circ}{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} -q_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & -q_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -q_3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -q_{\rho-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & a_{\rho-1} \end{bmatrix}; \quad \overset{\circ}{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} 1 & -q_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -q_2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & a_\rho q_{\rho-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_\rho \end{bmatrix}. \quad (8.5)$$

**Der Ausnahmefall.** Der Koeffizient  $a_j$  ist gleich Null oder von zu kleinem Betrag. Dann bleibt  $a_j$  unverändert stehen, dafür wird  $q_{j-1}$  durch Null ersetzt. Dies hat zur Folge, daß  $\overset{\circ}{\mathbf{A}}$  nicht mehr bidiagonal ist, sondern in der letzten Spalte außer  $a_{\rho-1}$  noch weitere Koeffizienten enthält, während  $\overset{\circ}{\mathbf{B}}$  nach wie vor bidiagonal ist.

## 9. Numerische Durchführbarkeit und Rechenaufwand

### A Wahl der Stützwerte

#### Grundregel

Es seien die Koeffizientenmatrizen  $\mathbf{A}_0$  bis  $\mathbf{A}_\rho$  der Matrix (1.2) reellwertig, dann können die Eigenwerte (1.3) nur in konjugiert komplexen Paaren oder reellwertig auftreten. Auch die Stützwerte (2.1) werden deshalb in konjugierten Paaren oder aber reellwertig gewählt.

- A 1 Hermitesches Paar  $\mathbf{A}; \mathbf{B}$  mit  $\mathbf{B}$  def. Alle Eigenwerte sind reellwertig. Mittels der in [8] beschriebenen Kennziffer  $\mu$  werden sie nach der Größe geordnet und näherungsweise berechnet.
- A 2 Abgeänderte (benachbarte, gestörte) Matrizen.  
Die  $m = \rho \cdot n$  Eigenwerte

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m \quad (9.1)$$

der Matrix  $\mathbf{F}(\lambda)$  seien mit einer vorgegebenen Genauigkeit berechnet worden. Werden nun einige oder alle Elemente der Koeffizientenmatrizen  $\mathbf{A}_0$  bis  $\mathbf{A}_\rho$  geringfügig abgeändert (gestört), so wählt man die Werte (9.1) als Stützwerte.

Hierunter fällt auch die im Abschnitt 3 beschriebene Eskalation. So wird für  $\mathbf{F}(\lambda) = \mathbf{A} - \lambda \mathbf{B}$  mit den beiden Anteilen

$$\mathbf{A} = \mathbf{H}_A + \mathbf{R}_A, \quad \mathbf{B} = \mathbf{H}_B + \mathbf{R}_B \quad (9.2)$$

die zweiparametrische Matrix

$$\mathbf{G}(\lambda, \mu) = (\mathbf{H}_A - \lambda \mathbf{H}_B) + \mu \cdot (\mathbf{R}_A - \lambda \mathbf{R}_B). \quad (9.3)$$

Besonders geeignet sind die hermiteschen Komponenten

$$\mathbf{H}_A = \frac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{A}^*); \quad \mathbf{H}_B = \frac{1}{2}(\mathbf{B} + \mathbf{B}^*). \quad (9.4)$$

Allgemeiner wird für

$$\mathbf{F}(\lambda) = \mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_1 \lambda + \mathbf{A}_2 \lambda^2 + \dots + \mathbf{A}_\rho \lambda^\rho \quad (9.5)$$

die zweiparametrische Erweiterung

$$\mathbf{G}(\lambda, \mu) = (\mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_\rho \lambda^\rho) + \mu(\mathbf{A}_1 \lambda + \dots + \mathbf{A}_{\rho-1} \lambda^{\rho-1}). \quad (9.6)$$

Für  $\mu = 0$  wird mit den neuen Variablen  $\omega = -\lambda$

$$\mathbf{G}(\omega, 0) = \mathbf{A}_0 - \omega \mathbf{A}_\rho. \quad (9.7)$$

Das Matrizenpaar  $\mathbf{A}_0; \mathbf{A}_\rho$  besitzt die (im allgemeinen komplexen) Eigenwerte  $\omega_1$  bis  $\omega_n$ . Man startet daher die Eskalation mit den  $m$  Werten

$$\lambda_j = \sqrt[\rho]{-\omega_j}; \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (9.8)$$

(Kreisteilungssatz). Dieses Vorgehen ist besonders geeignet für den Fall  $\rho = 2$  (gedämpfte Schwingungen).

### A 3 Diagonaldominante Matrizen

Sind die Matrizen  $\mathbf{A}_0$  bis  $\mathbf{A}_\rho$  ausgeprägt diagonaldominant, so werden als Stützwerte die  $m = \rho \cdot n$  Nullstellen der  $n$  Gleichungen vom Grade  $\rho$

$$f_{jj}(\lambda) = 0; \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (9.9)$$

gewählt. Sollten darunter fast zusammenfallende (oder mehrfache) sein, so werden sie leicht abgeändert. Speziell für  $\mathbf{F}(\lambda) = \mathbf{A} - \lambda \mathbf{B}$  wird

$$\tilde{\lambda}_j = \frac{a_{jj}}{b_{jj}}; \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (9.10)$$

## B Berechnung der Defekte

### B 1 Die Differenzen

$$\delta_{\mu j} = \tilde{\lambda}_\mu - \tilde{\lambda}_j; \quad \mu = 1, 2, \dots, m; \quad \mu \neq j \quad (9.11)$$

werden nach der Größe ihrer Beträge geordnet und neu numeriert.

$$|\delta_{1j}| \geq |\delta_{2j}| \geq \dots \geq |\delta_{m-1,j}|. \quad (9.12)$$

### B 2 Die Matrix $\mathbf{F}(\tilde{\lambda}_j)$ wird mittels der in [14, S. 86] beschriebenen **Pivot-regulierung** auf die obere Dreiecksmatrix transformiert.

$$\mathbf{L}_j \mathbf{F}(\tilde{\lambda}_j) = \begin{bmatrix} \delta_{j1} & * & * & \dots & * & * \\ 0 & \delta_{j2} & * & \dots & * & * \\ 0 & 0 & \delta_{j2} & \dots & * & * \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \delta_{j,m-1} & * \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & p_j \end{bmatrix}; \quad \det \mathbf{L}_j = 1. \quad (9.13)$$

Dann ist nach (2.3)

$$d_j = \frac{p_j}{\det \mathbf{A}_\rho}; \quad j = 1, 2, \dots, m. \quad (9.14)$$

## C Rechenaufwand

Der Aufwand beträgt bei vollbesetzter Matrix  $\mathbf{F}(\tilde{\lambda}_j)$  rund  $n^3/3$  Operationen, bei bandförmiger Matrix weit weniger.

Alles übrige (Berechnung der Summen usw.) schlägt daran gemessen nicht zu Buch.

**D Grenzen der Durchführbarkeit**

- D 1 Schlechte Kondition der Matrix  $\mathbf{F}(\lambda)$  und damit Versagen des Gaußschen Algorithmus. Dies bedeutet, daß der Singularitätstest

$$\det \mathbf{F}(\lambda_k) = 0 \quad (9.15)$$

für den Eigenwert  $\lambda_k$  nicht bestanden wird.

- D 2 Die Eigenwerte liegen zu dicht, das heißt, sie stimmen in den ersten zehn, elf oder auch mehr Dezimalen überein, so daß eine Trennung nicht möglich wird.

**10. Numerische Beispiele****Erstes Beispiel**

Evolution eines Polynoms der Ordnung  $\rho = 10$ . Das Polynom

$$f(\lambda) = (1 - \lambda)(2 - \lambda) \dots (9 - \lambda)(10 - \lambda) \quad (10.1)$$

oder ausmultipliziert

$$f(\lambda) = 3\,628\,800 - 106\,286\,10\lambda + \dots + 1320\lambda^2 - 55\lambda^9 + 1\lambda^{10} \quad (10.2)$$

besitzt die Nullstellen 1, 2, ..., 10. Mit den von MATLAB ausgedruckten Näherungen als Stützwerten ergibt sich die Liste

Stützwerte (MATLAB)	Defekte	Hauptwerte
.1000000000033668D+01	.3366795731222570D-10	.1000000000000000D+01
.8999999998266890D+01	-.1733109659785119D-08	.9000000000000000D+01
.8000000003752177D+01	.3752177229950080D-08	.8000000000000000D+01
.6999999995590423D+01	-.4405576702114725D-08	.7000000000000000D+01
.6000000003027854D+01	.3027854417778462D-08	.6000000000000000D+01
.4999999998782576D+01	-.1217424381852713D-08	.5000000000000000D+01
.400000000272109D+01	.2721085580616848D-09	.4000000000000000D+01
.299999999970003D+01	-.2999689385732949D-10	.3000000000000000D+01
.200000000001268D+01	.1267874694224125D-11	.2000000000000000D+01
.99999999999924D+01	-.7638334403551509D-13	.1000000000000000D+02

und hier sind alle Hauptwerte auf 16 Dezimalen genau. Mit etwas größeren Stützwerten wird dagegen

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \text{Stützwerte} & \text{Defekte} & \text{Hauptwerte} \\ 1,0001 & 0,990\,017\,039\,774\,833\,0 \cdot 10^{-4} & 1,000\,000\,118\,216\,023 \\ 2,0002 & 0,199\,751\,439\,100\,156\,1 \cdot 10^{-3} & 2,000\,000\,248\,560\,812 \\ 3,0003 & 0,299\,601\,184\,515\,361\,5 \cdot 10^{-3} & 3,000\,000\,368\,154\,847 \\ 4,0004 & 0,399\,541\,523\,004\,423\,6 \cdot 10^{-3} & 4,000\,000\,450\,476\,996 \\ 5,0005 & 0,499\,500\,092\,121\,123\,7 \cdot 10^{-3} & 5,000\,000\,499\,907\,879 \\ 6,0006 & 0,599\,531\,897\,097\,070\,1 \cdot 10^{-3} & 6,000\,000\,468\,102\,427 \\ 7,0007 & 0,699\,671\,705\,593\,324\,9 \cdot 10^{-3} & 7,000\,000\,328\,214\,067 \\ 8,0008 & 0,799\,978\,757\,040\,056\,0 \cdot 10^{-3} & 8,000\,000\,021\,242\,160 \\ 9,0009 & 0,900\,580\,770\,885\,167\,0 \cdot 10^{-3} & 8,999\,999\,412\,229\,114 \\ 10,0010 & 0,100\,193\,010\,402\,261\,5 \cdot 10^{-2} & 9,999\,998\,069\,895\,077 \end{array} \right\}, \quad (10.4)$$

und jetzt sind zwei Evolutionen erforderlich bis auch hier die Rechnung stagniert.

**Zweites Beispiel.** Das Paar  $\mathbf{A}; \mathbf{B}$  mit

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & b & 0 & -40 - 42b \\ 0 & 1 & 0 & -42 \\ 1 & 0 & b & 68 + 11b \\ 0 & 0 & 1 & 11 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \det \mathbf{B} = -1 \quad (10.5)$$

besitzt die Eigenwerte 2, 2, 2 und 5 für jeden Wert von  $b$ .

Speziell für  $b = 0,1$  resultiert mit den Stützwerten

$$1,8 \quad 1,9 \quad 2,1 \quad 5,1 \quad (10.6)$$

die Liste

$$\mathcal{L}_0 = \left\{ \begin{array}{ccc} 1.8000000000000000e+00 & -2.585858585862065e-01 & 2.058585858586206e+00 \\ 1.9000000000000000e+00 & 4.843750000018705e-02 & 1.851562499999813e+00 \\ 2.1000000000000000e+00 & 1.611111111110182e-02 & 2.083888888888898e+00 \\ 5.1000000000000000e+00 & 9.4037247475066e-02 & 5.005962752525249e+00 \\ \hline 1.0900000000000000e+01 & -1.000000000001670e-01 & 1.1000000000000017e+01 \end{array} \right\} \quad (10.7)$$

Mit den Mittelwerten

$$\mathcal{L}_3 = 1.933333333333334e+00, \quad D_3 = -6,467908249163921e-02 \quad (10.8)$$

liefert die Regula falsi in drei Schritten den dreifachen Eigenwert 2 mit großer Genauigkeit

$\lambda_j$	$k_3(\lambda_j)$	$y_j = f(\lambda_j)$	
$2.000000068392587e+00$	$3.472213528755886e-05$	$-6.825686146849641e-08$	(10.9)
$2.000000000135725e+00$	$3.472222204970157e-05$	$-1.353971657014341e-10$	
$2.0000000000000059e+00$	$3.422222222214840e-05$	$-1.387778780781446e-16$	

während MATLAB 6.5 die folgenden Eigenwertnäherungen ausdrückt

$$\begin{array}{ll} 1.9999883115830150e+00 & 2.0243917437559715e-05 \\ 1.9999883115830150e+00 & -2.0243917437559715e-05 \\ 2.0000233768340361e+00 & 0.0000000000000000e+00 \\ 4.999999999999325e+00 & 0.0000000000000000e+00 \end{array} \quad (10.10)$$

**Drittes Beispiel.** Reellsymmetrisches Paar **A**; **B** mit dicht benachbarten einfachen Eigenwerten

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} n & n-1 & n-2 & \dots & 3 & 2 & 1 \\ n-1 & n-1 & n-2 & \dots & 3 & 2 & 1 \\ n-2 & n-2 & n-2 & \dots & 3 & 3 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 3 & 3 & 3 & \dots & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (10.11)$$

Das Spektrum ist begrenzt durch die Werte  $-\alpha$  und  $+8$  mit

$$\alpha = \frac{4}{27} (14 + 5\sqrt{10}) \approx 4.41650. \quad (10.12)$$

Die Summe aller Eigenwerte ist gleich -4.

Mit

$$\sigma_j = 4 \sin^2 \left( \frac{2j-1}{2n+1} \frac{\pi}{2} \right); \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (10.13)$$

lassen sich die Eigenwerte exakt angeben

$$\lambda_j = \sigma_j^3 - 4\sigma_j^2 + 2\sigma_j; \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (10.14)$$

Speziell für die Ordnungszahlen

$$n = 1 + 3k; \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (10.15)$$

enthält das Spektrum den Eigenwert  $\lambda_j = -1$ , was als Kontrolle dient.

Speziell für  $k = 16$ , somit  $n = 49$  wurde mit den äquidistanten Stützwerten

$$-6 \quad -5,7 \quad -5,4 \quad \dots \quad 0 \quad \dots \quad 6 \quad 6,3 \quad \dots \quad 8,1 \quad 8,4 \quad (10.16)$$

der Algorithmus getestet. Die Ergebnisse sind zufriedenstellend.

Genauer dazu auf Anfrage beim Verfasser.

### Danksagung

Für tatkräftige Mitarbeit und sachkundige Beratung danke ich Herrn Dr.-Ing. Nils Wagner, Universität Stuttgart.

### Literatur

- [1] BUDICH, H. & S.FALK: Der Eigenwertalgorithmus ECP (Expansion des charakteristischen Polynoms) auf dem Prüfstand, ZAMM 67 (1997), T460-T462.
- [2] BUDICH, H. & S. FALK: Die verallgemeinerte Regula falsi und das Matrizen-Eigenwertproblem, ZAMM81 (2001) SUPP/4, pp. 1007-1008.
- [3] CARSTENSEN, C. & E. STEIN: Über die Falksche ECP-Transformation und Verallgemeinerungen, ZAMM69 (1989) 11, pp. 375-391.
- [4] CARSTENSEN, C. & E. STEIN: Analysis und Berechnung der Falk'schen ECP-Transformation und verwandte Probleme, International Series of Numerical Mathematics, vol. 83 (1987) pp. 47-61.
- [5] FALK, S.: Iterative Berechnung von Matrizen-Eigenwerten, Festschrift P. Ruge 60 Jahre, Dresden (2003).
- [6] FALK, S.: Die beschleunigte RITZ-Iteration für einparametrische Matrizen. ZAMM Z. Angew. Math. Mech. 81 (2001) S 4, pp. 1009-1012.
- [7] FALK, S. & N. WAGNER: Ein neuer Eigenlöser (eigensolver) für Polynommatrizen, GAMM-Tagung Dresden (2004).
- [8] FALK, S.: Ein optimaler Eigenwertalgorithmus für hermitesche Matrizenpaare, Abhandlungen der Braunschweigischen Wissenschaftlichen Gesellschaft (2003), pp. 65-91.
- [9] NEUMAIER, A.: Enclosing clusters of zeros of polynomials, Journal of Computational and Applied Mathematics 156 (2003) pp. 389-401.
- [10] RUMP, S.: Computational error bounds for multiple or nearly multiple eigenvalues, Linear Algebra and its Applications 324 (2001) pp. 209-226.
- [11] RUMP, S.: Ten methods to bound multiple roots of polynomials, Journal of Computational and Applied Mathematics 156 (2003) pp. 403-432.
- [12] SCHNEIDER, J.: Eigenwerte diagonaldominanter Matrizenpaare, ZAMM, Z. angew. Math. Mech. 67 (1987).
- [13] WAGNER, N.: Exkurs über mehrfache Eigenwerte von Polynommatrizen, Hagen (2004).
- [14] ZURMÜHL, R. & S. FALK, S.: Matrizen und ihre Anwendungen 1, Grundlagen. 6. Auflage (1992) Springer-Verlag Berlin.



- [15] ZURMÜHL, R. & S. FALK: Matrizen und ihre Anwendungen 2, Numerische Methoden, 5. Auflage (1986) Springer-Verlag Berlin.
- [16] ZURMÜHL, R.: Praktische Mathematik für Ingenieure und Physiker, Fünfte neubearbeitete Auflage. Reprint. Springer-Verlag (1984).
- [17] GOLUB, G. H. & H.A. VAN DER VORST: 150 Years old and still alive: eigenproblems, The state of the art in numerical analysis. Oxford, Clarendon Press (1997).